

УДК 624.131.5

DOI: 10.17213/mgvgif/2026-5-406-411

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ И ОЦЕНКА ЕГО ТОЧНОСТИ

В. В. Ревенко, В. Н. Моргунов

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М. И. Платова, г. Новочеркасск, Россия

Аннотация. Рассматриваются примеры использования метода конечных разностей для аналога песчаного основания при равномерной нагрузке по площади круга при механических характеристиках модуля сдвига и параметра Ляме с последующей оценкой точности.

Ключевые слова: осесимметричная задача, модуль сдвига, параметр Ляме, метод конечных разностей

AN EXAMPLE OF USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD IN SOLVING A ROTATIONALLY SYMMETRIC PROBLEM AND AN ASSESSMENT OF ITS ACCURACY

V. V. Revenko, V. N. Morgunov

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia

Annotation. Examples of using the finite difference method for an analogue of a sandy base under uniform load over the area of a circle with mechanical characteristics: shear modulus and parameter, followed by an assessment of accuracy, are considered.

Keywords: axisymmetric problem, shear modulus, Lamé parameter, finite difference method

При переходе от линейно–деформированной среды к нелинейной в качестве расчетных характеристик часто используется пара G (модуль сдвига) и K (модуль объёмного сжатия) [1]. Одним из вариантов использования в механике грунтов метода конечных разностей (МКР) является приём Е.Ф. Винокурова [2]. В нём в качестве расчетных характеристик деформируемости грунта используется модуль сдвига G и параметр Ляме λ . Основные уравнения являются синтезом статического, геометрического и физического обследования задачи и служат для решения различных линейных и нелинейных задач, в том числе и осесимметричных:

$$\begin{aligned} & [2G' \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G' \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + G' \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \lambda' \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{G'}{r} (\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z})] + \\ & 2 \frac{\partial G'}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial G'}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial G'}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \Theta \frac{\partial \lambda'}{\partial z} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & [G' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2G' \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + G' \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} + \frac{2G'}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda' \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2G' u}{r^2}] + \\ & + 2 \frac{\partial G'}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \Theta \frac{\partial \lambda'}{\partial r} + \frac{\partial G'}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial G'}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где G' , λ' – переменные величины; $\Theta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$, где w и u — вертикальные и радиальные перемещения.

В квадратных скобках в уравнениях (1), (2) указаны переменные величины, которые при отсутствии штриха являются постоянными и определяют линейное решение.

Для рассматриваемого ниже расчетного примера по перемещениям были приняты следующие исходные данные: вертикальное равномерное давление $p = 220$ кПа (начальное нагружение) по площади круга с радиусом $R = 140$ мм, модуль упругости $E = 40$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ (как аналог для песчаного грунта).

По известным формулам были вычислены модуль сдвига $G = E/[2(1 + \nu)] = 15380$ кПа и параметр Ляме $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu) = 23070$ кПа.

В соответствии с условием осевой симметрии исходная сеточная область была принята минимальной при шаге сетки $\Delta z = \Delta r = 28$ мм (рис. 1).

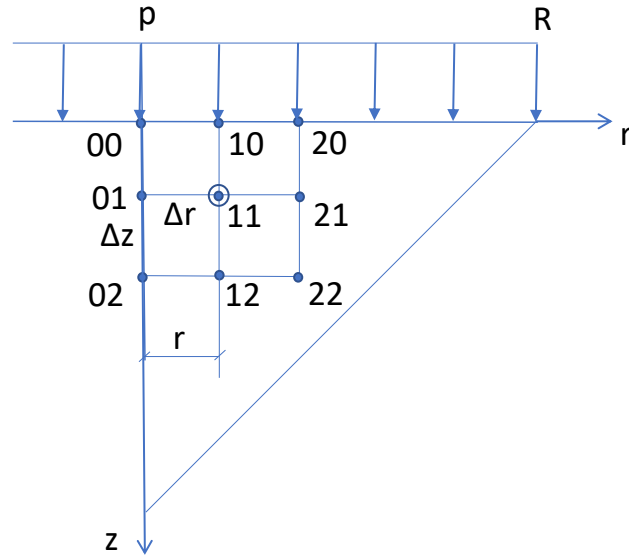


Рис. 1. Минимальная сеточная область

Соответствующие уравнения для этой сеточной области были записаны в конечно-разностном виде (выражения из (1) и (2) только в квадратных скобках при постоянных значениях G и λ) для внутреннего узла 11:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{12} + w_{10} - 2w_{11}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{21} + w_{01} - 2w_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{22} + u_{02} + u_{20} - u_{00}) + \\ + \lambda \frac{\Theta_{12} - \Theta_{10}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{21} - w_{01}}{2\Delta r} + \frac{u_{12} - u_{10}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{12} + u_{10} - 2u_{11}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{21} + u_{01} - 2u_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{22} + w_{02} + w_{20} - w_{00}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{21} - u_{01}}{\Delta r} + \lambda \frac{\Theta_{21} - \Theta_{01}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{11}}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Соответствующие граничные условия были приняты согласно аналитическому (табулированному) решению М. Б. Корсунского [3] для линейной осесимметричной задачи по формулам:

$$w = \frac{(1+\nu)2pR}{E} \left[\frac{1}{2} m S_1 + (1-\nu) S_3 \right]; u = - \frac{(1+\nu)2pR}{E} [m S_4 + (2\nu-1) S_6];$$

$$\Theta = \frac{2(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p S_1,$$

где $m = z/R$, S_1, S_3, S_4, S_6 — табличные числовые значения.

То есть граничные условия w и u , мм, Θ :

$w_{00} = 1,4014$	$w_{10} = 1,3874$	$w_{20} = 1,3439$
$u_{00} = 0$	$u_{10} = 0,04004$	$u_{20} = 0,08008$
	$\Theta_{10} = 0,00572$	
$w_{01} = 1,3101$		$w_{21} = 1,2504$
$u_{01} = 0$		$u_{21} = 0,02362$
$\Theta_{01} = 0,0045989$		$\Theta_{21} = 0,0044559$
$w_{02} = 1,2006$	$w_{12} = 1,1858$	$w_{22} = 1,1409$
$u_{02} = 0$	$u_{12} = -0,007207$	$u_{22} = -0,01602$
	$\Theta_{12} = 0,0035464$	

После подстановки вышеприведенных значений для G, λ и граничных условий для w, u, Θ в (3), (4) и вычислений получены уравнения: $-117,7 w_{11} + 150,17 = 0$ и $-156,936 u_{11} + 1,98314 = 0$, из которых следует: $w_{11} = 1,2759$ и $u_{11} = 0,012636$. Сравнением этих значений с точными (полученными по [3]) $w_{11} = 1,2949$ и $u_{11} = 0,01301$ имеем относительные погрешности вычислений по МКР: $\delta_{w11} = 1,47\%$ и $\delta_{u11} = 2,86\%$.

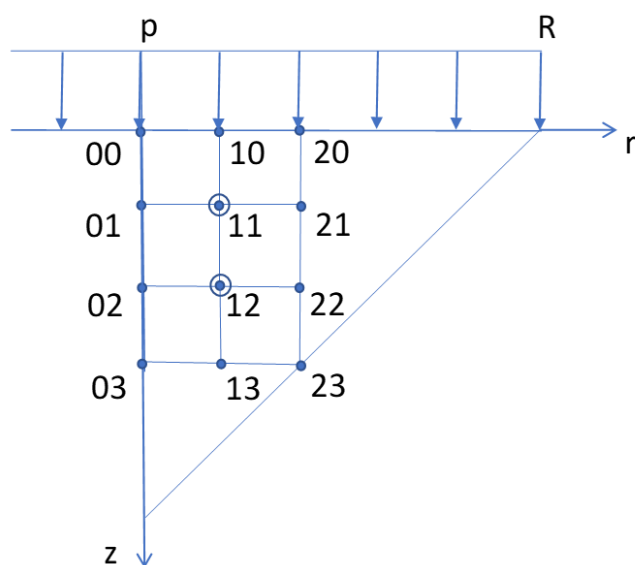


Рис. 2. Сеточная область с двумя внутренними узлами

Для следующего варианта с расширенной сеткой (рис. 2) также записаны соответствующие конечно-разностные уравнения

для внутреннего узла 11:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{12} + w_{10} - 2w_{11}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{21} + w_{01} - 2w_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{22} + u_{02} + u_{20} - u_{00}) + \\ + \lambda \frac{\theta_{12} - \theta_{10}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{21} - w_{01}}{2\Delta r} + \frac{u_{12} - u_{10}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{12} + u_{10} - 2u_{11}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{21} + u_{01} - 2u_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{22} + w_{02} + w_{20} - w_{00}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{21} - u_{01}}{\Delta r} + \lambda \frac{\theta_{21} - \theta_{01}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{11}}{r^2} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

для внутреннего узла 12:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{13} + w_{11} - 2w_{12}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{22} + w_{02} - 2w_{12}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{23} + u_{03} + u_{21} - u_{01}) + \\ + \lambda \frac{\theta_{13} - \theta_{11}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{22} - w_{02}}{2\Delta r} + \frac{u_{13} - u_{11}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{13} + u_{11} - 2u_{12}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{22} + u_{02} - 2u_{12}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{23} + w_{03} + w_{21} - w_{01}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{22} - u_{02}}{\Delta r} + \lambda \frac{\theta_{22} - \theta_{02}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{12}}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

при дополнительных граничных условиях:

$$\theta_{02} = 0,0035979$$

$$w_{03} = 1,085084$$

$$u_{03} = 0$$

$$w_{13} = 1,0712702$$

$$u_{13} = -0,0186186$$

$$\theta_{13} = 0,00272844$$

$$\theta_{22} = 0,0033862$$

$$w_{23} = 1,029028$$

$$u_{23} = -0,0368368$$

После подстановки вышеприведенных значений для G , λ и граничных условий для w , u , θ в (5)–(8) и вычислений получена система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 39,23w_{11} - 117,7w_{12} - 9,809u_{11} + 0u_{12} + 86,73 &= 0, \\ -117,7w_{11} + 39,23w_{12} - 0u_{11} + 9,809u_{12} + 103,3 &= 0, \\ 0w_{11} + 0w_{12} + 19,62u_{11} - 156,9u_{12} - 1,413 &= 0, \\ 0w_{11} + 0w_{12} - 156,9u_{11} + 19,62u_{12} + 2,128 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из решения этой системы уравнений (*Mathcad*) следует, что $w_{11} = 1,2627$, $w_{12} = 1,1567$, $u_{11} = 0,012636$, $u_{12} = -0,007426$. Сравнением этих значений с точными (полученными по [3]) $w_{11} = 1,2949$, $w_{12} = 1,1858$, $u_{11} = 0,01301$, $u_{12} = -0,007207$ имеем относительные погрешности вычислений по МКР: $\delta_{w11} = 2,49\%$, $\delta_{w12} = 2,45\%$, $\delta_{u11} = 2,89\%$ и $\delta_{u12} = 3,04\%$.

Последующий вариант с увеличенной сеточной областью (рис. 3) имеет аналогичные конечно-разностные уравнения

для внутреннего узла 11:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{12} + w_{10} - 2w_{11}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{21} + w_{01} - 2w_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{22} + u_{02} + u_{20} - u_{00}) + \\ + \lambda \frac{\theta_{12} - \theta_{10}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{21} - w_{01}}{2\Delta r} + \frac{u_{12} - u_{10}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{12} + u_{10} - 2u_{11}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{21} + u_{01} - 2u_{11}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{22} + w_{02} + w_{20} - w_{00}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{21} - u_{02}}{\Delta r} + \lambda \frac{\theta_{21} - \theta_{01}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{11}}{r^2} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

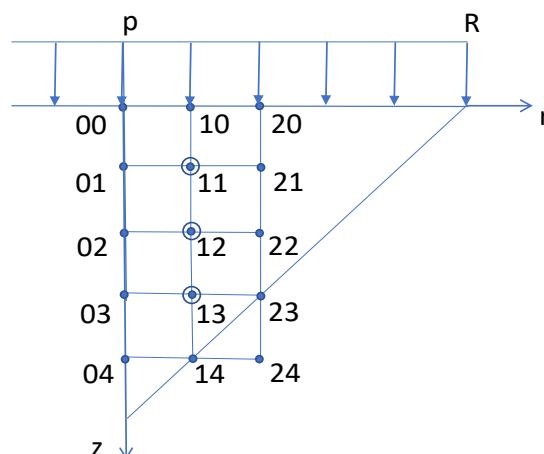


Рис. 3. Сеточная область с тремя внутренними узлами

для внутреннего узла 12:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{13} + w_{11} - 2w_{12}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{22} + w_{02} - 2w_{12}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{23} + u_{03} + u_{21} - u_{01}) + \\ + \lambda \frac{\theta_{13} - \theta_{11}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{22} - w_{02}}{2\Delta r} + \frac{u_{13} - u_{11}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{13} + u_{11} - 2u_{12}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{22} + u_{02} - 2u_{12}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{23} + w_{03} + w_{21} - w_{01}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{22} - u_{02}}{\Delta r} + \lambda \frac{\theta_{22} - \theta_{02}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{12}}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

для внутреннего узла 13:

$$\begin{aligned} \frac{2G}{\Delta z^2}(w_{14} + w_{12} - 2w_{13}) + \frac{G}{\Delta r^2}(w_{23} + w_{03} - 2w_{13}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-u_{24} + u_{04} + u_{22} - u_{02}) + \\ + \lambda \frac{\theta_{14} - \theta_{12}}{2\Delta z} + \frac{G}{r} \left(\frac{w_{23} - w_{03}}{2\Delta r} + \frac{u_{14} - u_{12}}{2\Delta z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2}(u_{14} + u_{12} - 2u_{13}) + \frac{2G}{\Delta r^2}(u_{23} + u_{03} - 2u_{13}) + \frac{G}{4\Delta z\Delta r}(-w_{24} + w_{04} + w_{22} - w_{02}) + \\ + \frac{G}{r} \frac{u_{23} - u_{03}}{\Delta r} + \lambda \frac{\theta_{23} - \theta_{03}}{2\Delta r} - \frac{2Gu_{13}}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

при дополнительных граничных условиях:

$$\theta_{03} = 0,0027799$$

$$w_{14} = 0,888087$$

$$\theta_{23} = 0,0025797$$

$$w_{04} = 0,899298$$

$$u_{14} = -0,0228288$$

$$w_{24} = 0,855855$$

$$u_{04} = 0$$

$$\theta_{14} = 0,00210496$$

$$u_{24} = -0,0448448$$

После подстановки вышеприведенных значений для G , λ и граничных условий для w , u , Θ в (9)–(14) и вычислений получена система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -117,7w_{11} + 39,23w_{12} + 0w_{13} + 0u_{11} + 9,809u_{12} + 0u_{13} + 103,26 &= 0, \\ 39,23w_{11} - 117,7w_{12} + 0w_{13} - 9,809u_{11} + 0u_{12} + 9,809u_{13} + 87,08 &= 0, \\ 0w_{11} + 39,23w_{12} - 117,7w_{13} + 0u_{11} - 9,809u_{12} + 0u_{13} + 75,09 &= 0, \\ 0w_{11} + 0w_{12} + 0w_{13} - 156,93u_{11} + 19,62u_{12} + 0u_{13} + 2,128 &= 0, \\ 0w_{11} + 0w_{12} + 0w_{13} + 19,62u_{11} - 156,93u_{12} + 19,62u_{13} - 1,048 &= 0, \\ 0w_{11} + 0w_{12} + 0w_{13} + 0u_{11} + 19,62u_{12} - 156,93u_{13} - 2,777 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из решения этой системы уравнений (*Mathcad*) следует, что $w_{11} = 1,2627$, $w_{12} = 1,1581$, $w_{13} = 1,0246$, $u_{11} = 0,012632$, $u_{12} = -0,0074264$, $u_{13} = -0,018624$. Сравнением этих значений с точными (полученными по [3]) $w_{11} = 1,2949$, $w_{12} = 1,1858$, $w_{13} = 1,0712702$, $u_{11} = 0,01301$, $u_{12} = -0,007207$, $u_{13} = -0,0186186$ имеем относительные погрешности вычислений по МКР: $\delta_{w11} = 2,49\%$, $\delta_{w12} = 2,33\%$, $\delta_{w13} = 4,36\%$, $\delta_{u11} = 2,92\%$, $\delta_{u12} = 3,04\%$ и $\delta_{u13} = 0,03\%$.

Из рассмотренных вариантов следует, что погрешности вычислений по МКР значительно меньше погрешностей определения G и λ экспериментальными методами.

Полученные результаты дают возможность предварительной оценки точности решения различных нелинейных задач, например, основанных на переменных значениях механических характеристик песчаного основания под круглым штампом. Такие механические характеристики получены по экспериментальным данным для оси симметрии основания во всем диапазоне нагружения [4, 5].

Список источников

1. Иванов, П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений / П. Л. Иванов. – М, Высшая школа, 1985.
2. Винокуров, Е. Ф. Итерационный метод расчета оснований и фундаментов с помощью ЭВМ / Е. Ф. Винокуров. – Изд. «Наука и техника», Минск. – 1972.
3. Корсунский М. Б. Определение напряжений и перемещений в основании сооружения, создающего на грунт вертикальное равномерное давление по площади круга. НИИОСП / М. Б. Корсунский // Основания и фундаменты: Сб. тр. № 55, – М.: Стройиздат, 1964. – С. 5-15.
4. Ревенко, В. В. Экспериментальное определение коэффициентов Пуассона и бокового давления в песчаном основании под круглым штампом / В. В. Ревенко, В. Н. Моргунов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2024. – № 6. – С. 26-29. DOI 10.1007/s11204-025-10013-3.
5. Ревенко, В. В. Экспериментальное определение модуля общей деформации песчаного основания под круглым штампом / В. В. Ревенко, В. Н. Моргунов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2025. – № 4. – С. 8-10. DOI 10.1007/s11204-025-10063-7.

© Ревенко В. В., Моргунов В. Н., 2026